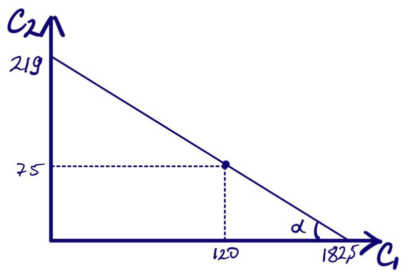
. 10 класс. Задача 1. Подарок от бабушки (45 баллов)

$$w_1 = 120 \qquad w_2 = 75 \qquad U(c_1, c_2) = 120ln(c_1) + \delta c_2$$

1. $r = 20\%$
   Приведенная стоимость потребления за два года должна быть равна приведенной стоимости дохода за два года: $c_1 + \frac{c_2}{1+r} = w_1 + \dfrac{w_2}{1+r}$ или $c_1 + \frac{c_2}{1{,}2} = 120 + \frac{75}{1{,}2} = 182{,}5$ (МБО) **(4 балла)**



$tg\alpha = 1{,}2$
точка (120;75) - точка автономного потребления, точка Полония

(3 балла)

Задача:

$$\begin{cases} U(c_1, c_2) = 120ln(c_1) + \delta c_2 \xrightarrow[c_1, c_2]{} max; \\ c_1 + \frac{c_2}{1{,}2} = 182{,}5; \\ c_1 > 0, c_2 \geq 0. \end{cases}$$

3 балла, необходимо проверить, правильно ли найдено ограничение по уровню расходов в каждом периоде

Необходимо отметить, что может быть угловое решение относительно c_2. Потребление c_1 должно быть строго положительным.

2. Здесь возможно два вида решения: внутреннее и угловое. Рассмотрим оба.

   - внутреннее: $c_1 > 0, c_2 > 0$
     выражаем из МБО c_2 через c_1:
     $U(c_1) = 120ln(c_1) + \delta(219 - 1{,}2c_1) \xrightarrow[c_1]{} max$**(4 балла)**
     $U'(c_1) = \frac{120}{c_1} - 1{,}2\delta = 0$
     $U''(c_1) = -\frac{120}{c_1^2} < 0$ **(2 балла)**$\Rightarrow$ $max c_1^* = \frac{100}{\delta}, c_2^* = 219 - \frac{120}{\delta}$
     $U^*(c_1^*, c_2^*) = 120ln(\frac{100}{\delta}) + 219\delta - 120 = 120ln(100) - 120ln(\delta) + 2219\delta - 120$ т.к. $\delta < 1$, полезность возрастет по величине δ. Оценим полезность по минимальному значению $\delta = \frac{2}{3}$: **(1 балла)**
     $U^*(c_1^*, c_2^*, \delta = \frac{2}{3}) = 120 \times 4{,}6 - 120 \times (-0{,}4) + 219 \times \frac{2}{3} - 120 = 626$
   - угловое решение $c_1 > 0, c_2 = 0$
     В этом случае потребление $c_1^\circ = 182{,}5$, а полезность равна $U^\circ(c_1^\circ = 182{,}5; c_2^\circ = 0) = 624$
     Видно, что даже при минимальном значении δ, Петя получает бОльшую полезность при внутреннем решении **(4 балла)**

3. $r = 20\%$ (депозит);
   $i = 25\%$ (кредит).

   Теперь МБО Пети будет состоять из двух сегментов в зависимости от того, является ли он заёмщиком или сберегателем.

   Если сберегатель: $\begin{cases} c_1 = 120 - s_1; \\ c_2 = 75 + 1{,}2s_1; \end{cases}$ или $c_2 = 75 + 1{,}2(120 - c_1)$, если $c_1 < 120$. **(4 балла)**

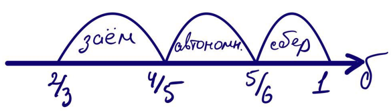
   Если заёмщик: $\begin{cases} c_1 = 120 + b_1; \\ c_2 = 75 - 1{,}25b_1; \end{cases}$ или $c_2 = 75 - 1{,}25(c_1 - 120)$, если $c_1 > 120$.**(4 балла)**

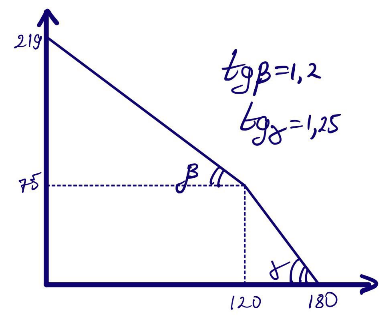
   Из оптимизационной задачи известно, что решение является внутренним ($\delta > 2/3$). Необходимо узнать, при каких значения δ Петя станет заёмщиком или сберегателем.

   Если Петя сберегает, то $c_1 = \frac{120}{1{,}2\delta} < 120$, т.е. $\delta > 5/6$.**(3 балла)**

   Если Петя заёмщик, то $c_1 = \frac{120}{1{,}25\delta} > 120$, т.е. $\delta < 4/5$.**(3 балла)**

   Значит при $\delta \in [4/5; 5/6]$ **(2 балла)** Петя расходует в каждом периоде свой доход, не используя услуги банка.





4. t = 20% на сумму к выплате по вкладу. Нас интересует только сегмент, где Петя является сберегателем:
$$\begin{cases} c_1 = 120 - s_1; \\ c_2 = 75 + s_1 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}8; \end{cases} \implies c_2 = 75 + 0{,}96(120 - s_1).$$**(4 балла)**

   Мы знаем из оптимизационной задачи, что $c_1 = \frac{120}{0{,}96 \cdot \delta} = \frac{125}{\delta}$.**(2 балла)**

   Если Петя сберегатель, то $c_1 < 120$: $\frac{125}{\delta} < 120$ или $\delta > \frac{125}{120} > 1$. Однако δ должно быть меньше 1 **(2 балла)**.

   Это говорит о том, что Пете не выгодно сберегать вообще, если имеется налог.

. 10 класс. Задача 2. Ценообразование в "Стране чудес"(45 баллов)

$q_1 = 100 - 10p$
$q_2 = 80 - 10p$
$MC = 4, FC = 0$

1. **(10 баллов за пункт 1)**
   Это случай раздельных продаж, или третий тип ценовой дискриминации
   Запишем прибыль как функцию от цены
   $\Pi = (100 - 10p_1)(p_1 - 4) + (80 - 10p_2)(p_2 - 4) \xrightarrow[p_1,p_2]{} max$
   $\Pi = 140p_1 - 10p_1^2 - 400 + 120p_2 - 10p_2^2 - 320 \xrightarrow[p_1,p_2]{} max$ **(2 балла за целевые функции)**
   Эти две несвязанные параболы с ветвями вниз, поэтому ищем максимум по каждой цене
   (2 балла за обоснование способа оптимизации и проверку условия второго порядка)
   Найдем оптимальные цены $p_1 = 7, p_2 = 6$ **(2 балла)**.
   Оптимальные объемы продаж равны $q_1 = 30, q_2 = 20$ **(2 балла за нахождение оптимального выпуска)**
   $\Pi_1^* = 7 \times 30 + 6 \times 20 - 4 \times (30 + 20) = 130$ **(2 балла за нахождение максимальной прибыли)**

2. **(10 баллов за пункт 2)**
   $p = 4$ и $T \le CS$
   Максимальная цена, которую готов заплатить потребитель за входной билет, равна величине его потребительского излишка. Необходимо определить, величину какого потребительского излишка (CS_1 или CS_2) следует использовать при назначении цены билета. **(2 балла)**
   Если $T = CS_1$, то покупает только первая группа посетителей, чья величина спроса при $p = 4$ равна $q_1^d = 60$.
   $\Pi_1 = CS_1 = \frac{(10-4)\times 60}{2} = 180$ **(3 балла)**
   Если $T = CS_2$, то покупают обе группы посетителей, так как цена билета ниже.
   При $p = 4 q_1 = 60, q_2 = 40$
   $\Pi_2 = 2CS_2 = 2\frac{(8-4)\times 40}{2} = 160$ **(3 балла)**
   Цена билета и является прибылью фирмы. 180 ≥ 160, поэтому парку развлечений выгодно обслуживать только первую группу посетителей. $\Pi_2^* = 180$ **(2 балла)**.

3. **(10 баллов за пункт 3)**
   Здесь возможны два варианта: либо продавать билеты обеим группам населения, либо только первой
   Если обслуживать **обе группы**, то $T = CS_2$:
   $\Pi = (p-4)(180-20p) + 2CS_2 = (p-4)(180-20p) + (8-p)(80-10p) = -10p^2 + 100p - 80$
   Это парабола ветвями вниз с вершиной в $p = 5$
   $q_1^* = 50$
   $q_2^* = 30$
   $CS_2 = \frac{3\times 30}{2} = 45$, то есть цена билета $T = 45$

$\Pi^* = 80 + 45 * 2 = 170$ **(6 балла)**
Если парк обслуживает только одну группу, то парку выгодно забрать весь потребительский излишек первой группы, а он максимален при $p = 4$.
Это можно доказать:
$\Pi = (p-4)(100-10p) + CS_1 = (p-4)(100-10p) + \frac{1}{2}(10-p)(100-10p) = 40p - 5p^2 + 100$
Это парабола ветвями вниз с вершиной в $p = 4$
$\Pi_3^* = CS^1 = T^1 = 180$ **(4 балла)**

4. **(10 баллов за пункт 4)** Аналогично с предыдущим пунктом, прибыль будет максимальна, если парк соберет в виде входного билета весь излишек каждой группы посетителей. Оба излишка максимальны при $p = 4$
$\Pi_4^* = CS_1(p = 4) + CS_2(p = 4) = 180 + 180 = 260$
(10 баллов), этот пункт можно решить двумя способами: составив функцию прибыли и максимизировав ее или обосновав, что излишек будет максимален при цене 4 евро

5. **(5 баллов за пункт 5))**
$\Pi_1^* < \Pi_2^* = \Pi_3^* < \Pi_4^*$
Очевидно, что дополнительная плата в виде входного билета увеличивает прибыль. Возможность назначать разные цены за билеты, то есть забрать весь излишек у обеих групп увеличивает прибыль еще больше. Поэтому дискриминация на уровне платы за входной билет дает наибольшую прибыль, а оба излишка максимальны, когда цена за поездку равна предельным издержкам.**(5 баллов)**

. 11 класс. Задача 2. Минералы и налоги (30 баллов)
$TC_i(q_i) = 0^5 q_i^2 + 4q$
$Q = 100 - P$

1. Оптимизационная задача каждой фирмы:
$\pi_i(q_i) = (100 - Q)q_i - 0^5 q_i^2 - 4q_i - tq_i \underset{q_i}{\longrightarrow} max$ **(2 балла)**
$\pi_i(q_i)' = 100 - 2q_i - q_{-i} - q_i - 4 - t = 0$
$\pi_i(q_i)'' = -3 < 0 \longrightarrow max$ или $\pi_i(q_i)$ - парабола ветвями вниз **(2 балла)**
$q_i = \frac{96 - t - q_{-i}}{3}$
Фирмы симметричные, поэтому в равновесии: $q_1^* = q_2^* = q^*$ **(1 балл)**
$q_i = 24 - \frac{t}{4}$
Налоговые сборы равны: $T = 2 * t * q^* = 2t(24 - \frac{t}{4} \underset{t}{\longrightarrow} max$
$T' = 48 - t = 0$ **(1 балл)**
$T'' = -1 < 0 \longrightarrow max$ или $T(t)$ - парабола ветвями вниз
$t^* = 48$**(1 балл)**, $q^* = 12$ **(1 балл)**
$T = 2 * 12 * 48 = 1152$**(1 балл)**
$\pi^* = (100 - 24) * 12 - 144/2 - 48 - 48 * 12 = 216$**(1 балл)**

2. Налог на прибыль никак не влияет на производственный оптимум фирмы, поэтому каждая фирма будет производить 24 кг минерала.
$\pi_i^g = (1 - g)\left[(100 - 48) * 24 - \frac{24^2}{2} - 4 * 24\right] = (1 - g) * 864$**(4 балла)**
Пусть G - налоговые сборы: $G = 2 * 864 * g = 1728g$**(2 балла)**
$g = \frac{1152}{1728} = \frac{2}{3}$**(1 балл)**
$\pi^g = \frac{864}{3} = 288$**(2 балла)**

3. Если выбирается ставка налога t на кг добытого минерала, то: $T(t) = 48t - \frac{t^2}{2} \geq 1024$**(2 балла)**
$t_{1,2} = 48 \pm 16$
$t_1 = 64 - \emptyset$ не подходит (минимальная добыча)
$\boxed{t_2 = 32}$**(2 балла)**
$q(t = 32) = 16$**(1 балл)**
$p = 100 - 32 = 68$**(1 балл)**
$\pi_i^t = 68 * 16 - \frac{256}{2} - 4 * 16 - 32 * 16 = 384$**(1 балл)**
Если выбирается налог на прибыль g, то: $g \geq \frac{1024}{1728} = \frac{16}{27}$**(2 балла)**
$\pi_i^g = \frac{864 * 11}{27} = 352$**(1 балл)**
Король выбирет налог $t = 32$ денежных едениц на кг добытого минерала. Будет добыто 32 кг. В этом случае фирмы получают наибольшую прибыль.**(1 балл)**
Альтернативная трактовка (принятие решения на основе наибольшего выпуска)

Налог на прибыль не меняет оптимальное количество **(1 балл)**
Обоснование этого утверждения: есть выражение для прибыли π_i^g (см. пункт 2) **(2 балла)**
Производимое количество при введении потоварного налога меньше, чем при налоге на прибыль **(2 балл)**
Обоснование этого утверждения: есть выражения для q_1 и q_2 в 1 пункте задачи. Например: q_1=q_2=$24-\frac{t}{4}$, Q=$48-\frac{t}{2}$ **(2 балл)**
Посчитан объем производства $Q=48$ **(2 балла)**
Посчитан налог на прибыль $g \geq \frac{1024}{1728}=\frac{16}{27}$ **(2 балла)**

. 9 класс. Задача 4. Квотирование (30 баллов)

$Q^s = b\sqrt{p}, Q^d = \frac{a}{\sqrt{p}}, p^* = 9$

1. **(11 баллов за пункт 1)**
   Нам не известны параметры a и b, но мы их можем восстановить. Во-первых, мы знаем, что при цене 9 талеров величина спроса был равен величине предложения: $3b = \frac{a}{3}, a = 9b$.
   Во-вторых, при цене 4 продажи агрокомплекса равны 5 бушелям: $\frac{a}{2} - 2b = 5$, где $2b$ - это продажи местных фермеров.
   $\begin{cases} a = 9b \\ \frac{a}{2} - 2b = 5 \end{cases} \longrightarrow$2,5b = 5$\longrightarrow$b = 2, a = 18 **(5 баллов)**
   Поэтому при конкурентной цене $P=4$ жители всего купили 9 **(3 балла)** бушелей зерна, а местные фермеры продали 4 бушеля. **(3 балла)**

2. **(12 баллов за пункт 1)**
   Если квота равна 2,2 бушеля, то совокупное предложение равно $2\sqrt{2}+2^2$, если $p \geq 4$ **(3 балла)**
   Сделаем замену $t = \sqrt{p}$:
   $\frac{18}{t} - 2t - 2{,}2 = 0| * 5t$
   $90 - 10t^2 - 11t = 0$
   $t_{1,2} = \frac{-11\pm61}{20}$**(3 балла)**
   $t_1 = -3{,}6\varnothing$
   $t_2 = 2{,}5$
   $\sqrt{p} = 2{,}5$
   $p = 6{,}25$**(5 баллов)**
   Местные фермеры продадут 5 бушелей зерна**(1 балл)**

3. **(7 баллов за пункт 3)**
   Аргументы за: создание рабочих мест (решение социальных проблем безработицы), снижение зависимости от крупного поставщика, повышение доходов местных жителей с дальнейшим мультипликативным повышением расходов. **(по 1 баллу за аргумент)**
   Аргументы против: подорожание продукции для местных жителей, снижение благосостояния потребителей, искажение стимулов для местных производителей. **(по 1 баллу за аргумент)**
   Альтернативные меры: налоги на агрокомплекс, субсидии местным фермерам. **(1 балл)**